Skolverket

Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar PBMaE 05-05
Umeå universitet

PROV I MATEMATIK KURS E
FRÅN
NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-17

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 17 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänd" ska kraven för "Väl godkänd" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn:______________________________

Skola:________________ Klass/program:__________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 1 (3249)
1/0

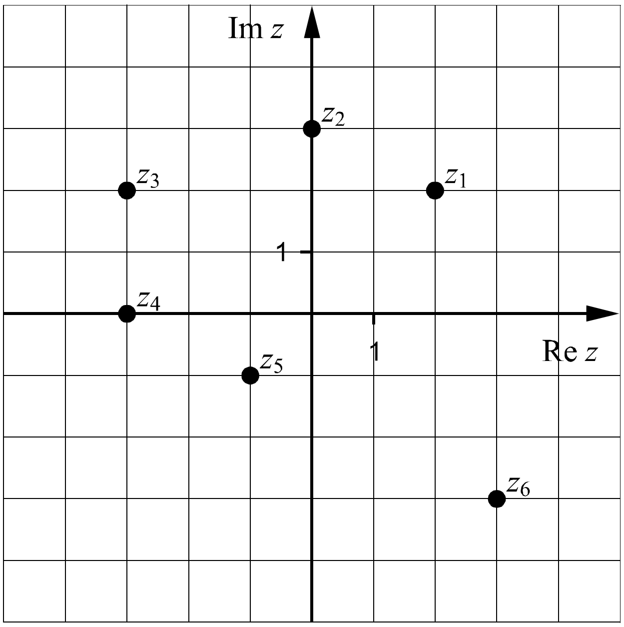
Lös differentialekvationen $y' = 4y$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (3250)
2/0

Förenkla $(5+\mathrm{i})^2$ och skriv resultatet på formen $a + b\mathrm{i}$

Uppgift nr 3 (3251)
1/0 , 1/0 , 1/0

De komplexa talen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 och z_6 är markerade i det komplexa talplanet nedan.



För vilket eller vilka av talen är

a) $|z| = 3$ *Endast svar fordras*

b) $\mathrm{Re}\, z > 0$ *Endast svar fordras*

c) $\arg z = 45°$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 4 (2115)
0/2

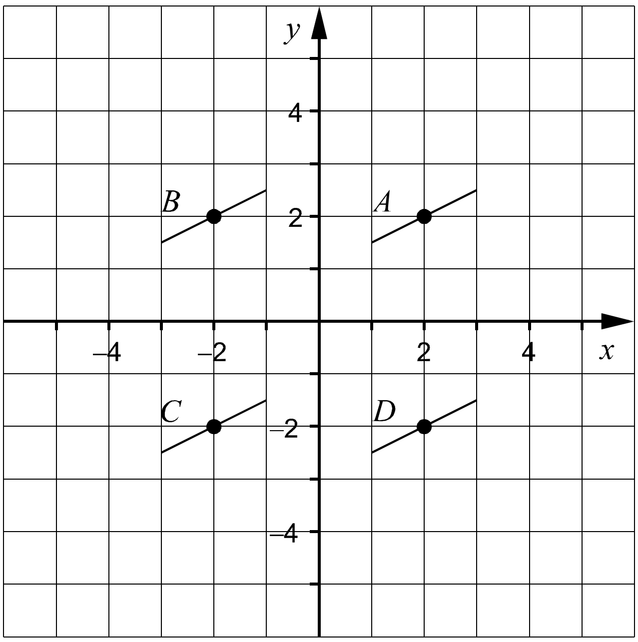
Bestäm det komplexa talet z så att $4z + 3\bar{z} = 28 + 5\text{i}$

Uppgift nr 5 (3448)
2/0

Differentialekvationen $y' = x^2 + y^2$ har en lösning y som uppfyller villkoret $y(1) = 0$
Bestäm ett närmevärde till $y(3)$ med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers stegmetod. Välj steglängden 1.

Uppgift nr 6 (3133)
0/1

Differentialekvationen $y' + \dfrac{y}{2x} = 0$ har lösningskurvor som går genom punkterna *A*, *B*, *C* och *D* i nedanstående figur. I var och en av dessa har tangentens riktning markerats. I två av punkterna är tangentens riktning felaktigt markerad.



I vilka två punkter är tangentens riktning felaktigt markerad?

Endast svar fordras

Uppgift nr 7 (3093)
0/3

Lös ekvationen $2z^3 = -54$

Uppgift nr 8 (3257)
0/2

Bestäm det reella talet x så att $\mathrm{Re}\left(\dfrac{10}{x+4\mathrm{i}}\right) = 1$

Uppgift nr 9 (3258)
0/2 , 0/1/¤

Funktionen f är definierad för alla x och $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Bestäm lokala maxima och minima för funktionen f.

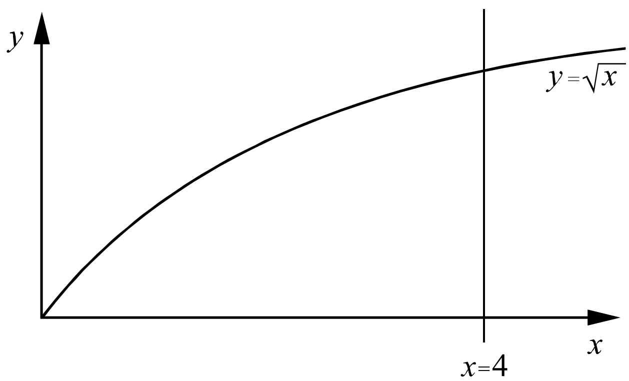
b) Undersök om funktionen har något största och minsta värde.

Uppgift nr 10 (3449)
2/0

Lös ekvationen $z^2 + 38z + 557 = 0$

Uppgift nr 11 (3252)
1/0 , 1/0

Ett område i första kvadranten begränsas av x-axeln, linjen $x = 4$ och kurvan $y = \sqrt{x}$
Låt området rotera kring x-axeln.



a) Ställ upp en integral som ger volymen av den rotationskropp som uppkommer. *Endast svar fordras*

b) Beräkna rotationskroppens volym. *Endast svar fordras*

Uppgift nr 12 (3091)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' - 8y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = 2$

Uppgift nr 13 (1725)
1/0 , 2/0 , 2/0

Rymdfysiker kan genom att analysera ljuset från en stjärna bestämma hur mycket av ämnet Uran-238 som finns kvar i stjärnan. Då kan man avgöra stjärnans ålder.

Atomkärnor av Uran-238 sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot antalet kvarvarande atomkärnor, N, vid tiden t år.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet.

Endast svar fordras

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen då hälften av antalet atomkärnor har sönderfallit efter $4{,}5 \cdot 10^{9}$ år.

Genom att analysera ljuset från stjärnan CS 31082-001 har fysikerna bestämt att det återstår ungefär 14,6 % av den ursprungliga mängden Uran-238 som fanns i stjärnan då den bildades.

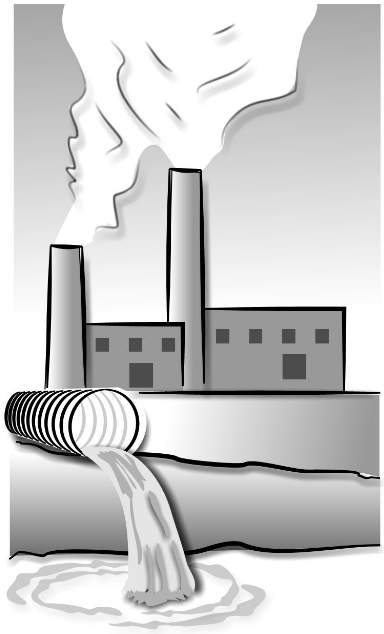
c) Bestäm stjärnans ålder.

Uppgift nr 14 (3253)
0/3

En liten sten kastas i en damm. Då skapas en våg i form av en cirkel på vattenytan. Enligt en förenklad modell kan man anta att cirkelns radie ökar med den konstanta hastigheten 1,5 m/s.

Med vilken hastighet ändras cirkelytans area 6,0 sekunder efter det att stenen träffat vattenytan?

Uppgift nr 15 (2577)
1/0 , 0/2 , 0/1



En sjö har under en lång tid förorenats av utsläpp från en fabrik. Detta har medfört att det nu finns cirka 500 kg föroreningar i sjön.

Fabriken släpper ut cirka 100 kg föroreningar per år. Via ett vattendrag försvinner årligen 10 % av mängden föroreningar från sjön.

För att studera hur mängden föroreningar (y kg) i sjön förändras med tiden (t år) går det att använda en matematisk modell i form av följande differentialekvation:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100 - 0{,}1y \quad \text{och} \quad y(0) = 500$$

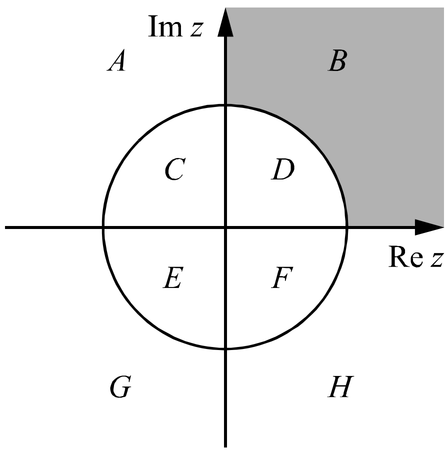
a) Förklara hur $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100 - 0{,}1y$ hänger ihop med förutsättningarna i texten.

b) Lös differentialekvationen då $y(0) = 500$

c) Vad händer enligt modellen med mängden föroreningar i sjön i ett längre tidsperspektiv?

Uppgift nr 16 (3450)
1/1/¤

I figuren är åtta olika områden i det komplexa talplanet markerade med *A, B, C, D, E, F, G* och *H*. Cirkeln är en enhetscirkel med centrum i origo. Cirkeln och koordinataxlarna ingår inte i något av de markerade områdena.



Bestäm i vilket eller vilka områden talet $\frac{1}{z}$ kan ligga om z ligger i B.

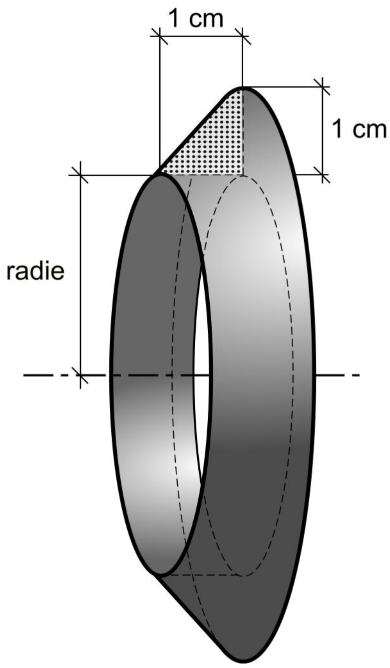
Uppgift nr 17 (3451)
3/3/¤

Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta extra hänsyn till:
• hur långt du kommit i din undersökning
• hur generell din undersökning är
• hur väl du redovisat ditt arbete
• hur väl du utför dina beräknigar
• hur väl du använt det matematiska språket

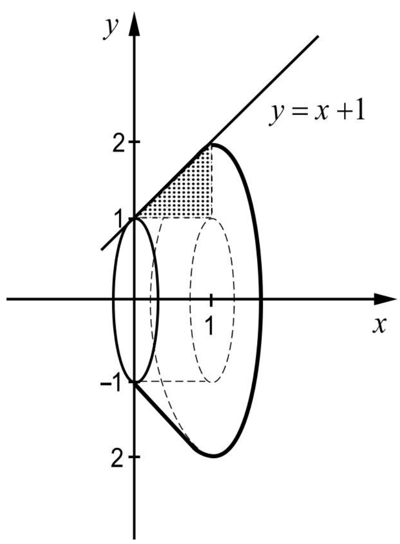
Ett företag tillverkar tätningsringar för rör i olika storlekar. Alla ringar har både höjden och tjockleken 1 cm, men kan ha olika radier (se figur 1).

Företagets produktutvecklare funderar på att utöka sortimentet. De vill därför veta hur mycket materialåtgången ökar för varje centimeter som tätningsringarnas radie ökar.

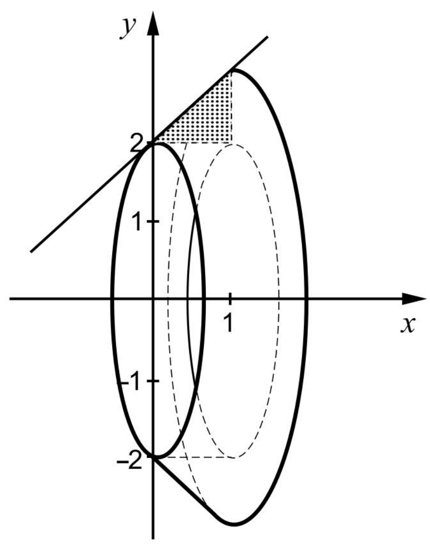
Tätningsringar kan representeras matematiskt genom rotation av trianglar runt x-axeln. I figur 2 och 3 ser du exempel på detta. I dessa figurer har ringarna radierna 1 cm respektive 2 cm.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

- Undersök och beskriv hur tätningsringarnas volym förändras för varje centimeter som radien ökar.

================================
Lösningar
================================
Uppgift nr 1 (3249)

$$y' = 4y$$
$$y' - 4y = 0$$
$$y = C \cdot \mathrm{e}^{4x}$$

SVAR: $y = C \cdot \mathrm{e}^{4x}$

Uppgift nr 2 (3250)

$$(5 + \mathrm{i})^2 = 25 + 10\mathrm{i} - 1 = 24 + 10\mathrm{i}$$

SVAR: 24 +10i

Uppgift nr 3 (3251)

a)
SVAR: z_2 och z_4

b)
SVAR: z_1 och z_6

c)
SVAR: z_1

Uppgift nr 4 (2115)

$$z = a + \mathrm{i}b \text{ och } \bar{z} = a - \mathrm{i}b$$
$$4z + 3\bar{z} = 28 + 5\mathrm{i}$$
$$4a + 4b\mathrm{i} + 3a - 3b\mathrm{i} = 28 + 5\mathrm{i}$$
$$\begin{cases} 7a = 28 \Rightarrow a = 4 \\ \;b = 5 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$
$$z = 4 + 5\mathrm{i}$$

SVAR: $z = 4 + 5\mathrm{i}$

Uppgift nr 5 (3448)

$$y' = x^2 + y^2$$
$$y(1) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n$$

Eulers stegmetod där $h = 1$ ger

n	x	y	y'
0	1	0	$1^2 + 0^2 = 1$
1	$1 + 1 = 2$	$0 + 1 \cdot 1 = 1$	$2^2 + 1^2 = 5$
2	$2 + 1 = 3$	$1 + 1 \cdot 5 = 6$	

SVAR: $y(3) \approx 6$

Uppgift nr 6 (3133)

$$y' + \frac{y}{2x} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{2x}$$

$A = (2, 2)$	$y' = \dfrac{-2}{2 \cdot 2} = -0{,}5$	Fel
$B = (-2, 2)$	$y' = \dfrac{-2}{2 \cdot (-2)} = 0{,}5$	Rätt
$C = (-2, -2)$	$y' = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot (-2)} = -0{,}5$	Fel
$D = (2, -2)$	$y' = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 2} = 0{,}5$	Rätt

SVAR: Tangenterna genom punkterna A och C är felaktigt inritade.

Uppgift nr 7 (3093)

$$2z^3 = -54 \Rightarrow z^3 = -27 = 27(\cos 180° + \mathrm{i} \cdot \sin 180°)$$
$$z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$$
$$z^3 = |z|^3(\cos 3\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin 3\alpha) = 27(\cos 180° + \mathrm{i} \cdot \sin 180°)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{27} = 3 \\ 3\alpha = 180° + 360°n \Rightarrow \alpha = 60° + 120°n \end{cases}$$

$n = 0 \quad \alpha = 60° \quad z_0 = 3(\cos 60° + \mathrm{i} \cdot \sin 60°) = 3(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$n = 1 \quad \alpha = 180° \quad z_1 = 3(\cos 180° + \mathrm{i} \cdot \sin 180°) = 3(-1 + \mathrm{i} \cdot 0) = -3$

$n = 2 \quad \alpha = 300° \quad z_2 = 3(\cos 300° + \mathrm{i} \cdot \sin 300°) = 3(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}$

SVAR:

$z_0 = 3(\cos 60° + \mathrm{i} \cdot \sin 60°)$, $z_1 = 3(\cos 180° + \mathrm{i} \cdot \sin 180°)$

$z_2 = 3(\cos 300° + \mathrm{i} \cdot \sin 300°)$

Uppgift nr 8 (3257)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{10}{x+4\mathrm{i}}\right)=1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{10x-40\mathrm{i}}{x^2+16}\right)=1$$

$$\frac{10x}{x^2+16}=1$$

$$x^2-10x+16=0$$

$$x_1=8$$

$$x_2=2$$

SVAR: $x_1=8$ och $x_2=2$

Uppgift nr 9 (3258)

a)

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$$f'(-2)=\frac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2}=\frac{-3}{25}<0$$

$$f'(0)=\frac{1-0^2}{(0^2+1)^2}=1>0$$

$$f'(2)=\frac{1-2^2}{(2^2+1)^2}=\frac{-3}{25}<0$$

$y'=0$ ger lokala maximum och minimum i $x=\pm 1$, där $y(1)=0{,}5$ och $y(-1)=-0{,}5$.

SVAR: : Lokalt maximum 0,5 för $x=1$ och lokalt minimum $-0{,}5$ för $x=-1$

b)

Se teckentabell ovan och $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

För $x>1$ är $f(x)$ avtagande men positiv och kan därför inte anta negativa värden.
Detta innebär att $f(x)$ aldrig kan bli mindre än det lokala minimivärdet $-0{,}5$

För $x < -1$ är $f(x)$ avtagande men negativ och kan därför inte anta positiva värden. Detta innebär att $f(x)$ aldrig kan bli större än det lokala maximivärdet 0,5

SVAR: Funktionens största värde är 0,5 och det minsta värdet är $-0{,}5$

Uppgift nr 10 (3449)

$$z = -19 \pm \sqrt{361 - 557} = -19 \pm 14\mathrm{i}$$

SVAR: $z = -19 \pm 14\mathrm{i}$

Uppgift nr 11 (3252)

a)

SVAR: $V = \int_0^4 \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 x \mathrm{d}x$

b)

$$\pi \int_0^4 x \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - 0 \right) = 8\pi$$

SVAR: 8π v.e.

Uppgift nr 12 (3091)

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$
$$r^2 + 2r - 8 = 0$$
$$r = -1 \pm 3$$
$$r_1 = -4 \text{ och } r_2 = 2$$

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-4x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 4$$
$$y' = -4C_1 \mathrm{e}^{-4x} + 2C_2 \mathrm{e}^{2x}$$
$$y'(0) = -4C_1 + 2C_2 = 2$$
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -4C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases}$$
$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 3$$

SVAR: $y = \mathrm{e}^{-4x} + 3\mathrm{e}^{2x}$

Uppgift nr 13 (1725)

a)

SVAR: $\frac{dN}{dt} = kN$

b)

$\frac{dN}{dt} = kN$ har lösningen $N(t) = N_0 e^{kt}$

Att hälften av kärnorna har sönderfallit efter $4{,}5 \cdot 10^9$ år ger att:

$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{k \cdot 4{,}5 \cdot 10^9}$ och därmed att $k = \frac{-\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9} \approx -1{,}540 \cdot 10^{-10}$

SVAR: $N(t) = N_0 e^{-1{,}54 \cdot 10^{-10} t}$

c)

$$0{,}146 \cdot N_0 = N_0 e^{\frac{-\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9} t}$$

$$\ln 0{,}146 = \frac{-\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9} t$$

$$t = -4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{\ln 0{,}146}{\ln 2} \approx 12 \cdot 10^9$$

SVAR: Stjärnan är ca 12 miljarder år.

Uppgift nr 14 (3253)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

Radien efter 6,0 s är 6 ·1,5 m = 9,0 m.

Vi får då $\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot 9{,}0 \cdot 1{,}5 \text{ m}^2/\text{s} \approx 85 \text{ m}^2/\text{s}$

SVAR: 85 m²/s

Uppgift nr 15 (2577)

a)

SVAR:

Varje år förändras mängden föroreningar i sjön genom att 100 kg föroreningar tillförs från fabriken och 10 % av den aktuella mängden föroreningar följer med vattnet ut ur sjön.

b)

$$\frac{dy}{dt} + 0{,}1y = 100$$

har lösningen $y = Ce^{-0{,}1t} + 1000$

$y(0) = 500 \Rightarrow C = -500$

$y(t) = 1000 - 500\mathrm{e}^{-0,1t}$

SVAR: $y(t) = 1000 - 500\mathrm{e}^{-0,1t}$

c)
$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 1000 - 500\mathrm{e}^{-0,1t} = 1000$

SVAR:
Massan kommer att stabilisera sig kring 1000 kg

Uppgift nr 16 (3450)

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$\bar{z}$ och därmed $\frac{1}{z}$ ligger i fjärde kvadranten eftersom z ligger i första kvadranten.

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} < 1$ eftersom $|z| > 1$

Beloppet av $\frac{1}{z}$ är mindre än 1 och $\frac{1}{z}$ ligger alltså innanför enhetscirkeln.

$\frac{1}{z}$ ligger i område *F*.

SVAR: $\frac{1}{z}$ ligger i område *F*.

Uppgift nr 17 (3451)

En ring med radie *r* representeras av den rotationskropp som uppkommer då linjen $y = x + r$ roterar runt *x*-axeln.
Volymen för ringen med inre radie *r*:

$$V_r = \pi\int_0^1 ((x+r)^2 - r^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (x^2 + 2xr + r^2 - r^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (x^2 + 2xr)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} + rx^2\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} + r\right)$$

Volymen för en ring med inre radie $r+1$ blir då $\mathrm{V}_{\mathrm{r}+1} = \pi\left(\frac{1}{3} + r + 1\right)$

Skillnaden i volym mellan dessa två ringar blir

$$\mathrm{V}_{\mathrm{r}+1} - \mathrm{V}_{\mathrm{r}} = \pi\left(\frac{1}{3} + r + 1\right) - \pi\left(\frac{1}{3} + r\right) = \pi$$

SVAR: En tätningsring som får 1 cm större inre radie får π cm^3 större volym.

==

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

Betygsgräns G: 13 poäng
Betygsgräns VG: 25 poäng varav 6 vg-poäng
Betygsgräns MVG: 25 poäng varav 13 vg-poäng dessutom ska eleven visa tre av fyra MVG kvaliteter.

==

Uppgift nr 1 (3249)

Max 1/0

	Korrekt svar ($y = Ce^{4x}$)	+1 g

Uppgift nr 2 (3250)

Max 2/0

	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. utvecklar kvadraten	+1 g
	med korrekt svar (24 +10i)	+1 g

Uppgift nr 3 (3251)

Max 3/0

a)	Korrekt svar (z_2 och z_4)	+1 g
b)	Korrekt svar (z_1 och z_6)	+1 g
c)	Korrekt svar (z_1)	+1 g

Uppgift nr 4 (2115)

Max 0/2

	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $4a + 4b\mathrm{i} + 3a - 3b\mathrm{i} = 28 + 5\mathrm{i}$	+1 vg
	med korrekt svar ($z = 4 + 5\mathrm{i}$)	+1 vg

Uppgift nr 5 (3448)

Max 2/0

	Redovisad godtagbar metod	+1 g
	med godtagbart svar ($y(3) \approx 6$)	+1 g

Uppgift nr 6 (3133)

Max 0/1

	Korrekt svar (A och C)	+1 vg

Uppgift nr 7 (3093)

Max 0/3

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar $z^3 = 27(\cos 180° + i \cdot \sin 180°)$ eller påbörjar polynomdivision med $z+3$	+1 vg
med i övrigt redovisad godtagbar lösning $\left(z_0 = 3(\cos 60° + i \cdot \sin 60°),\ z_1 = 3(\cos 180° + i \cdot \sin 180°) \text{ och } z_2 = 3(\cos 300° + i \cdot \sin 300°) \right)$	+1-2 vg

Uppgift nr 8 (3257)

Max 0/2

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. bestämning av realdel, $\frac{10x}{x^2+16}$	+1 vg
med i övrigt godtagbar lösning och godtagbart svar ($x_1 = 8$ och $x_2 = 2$)	+1 vg

Uppgift nr 9 (3258)

Max 0/3/¤

a)	Deriverar och bestämmer derivatans nollställen, $x = \pm 1$	+1 vg
	med godtagbar bestämning och verifiering av lokalt maximum och minimum (lokalt maximum 0,5 för $x = 1$ och lokalt minimum $-0,5$ för $x = -1$)	+1 vg
b)	Eleven påbörjar en undersökning, t.ex. genom att uppskatta funktionsvärdet för några stora värden på x	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod: eleven för generella resonemang kring funktionsvärden, t.ex. genom att fastslå att ”För $x > 1$ är $f(x)$ avtagande men positiv och kan därför inte anta negativa värden.”
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra matematiskt resonemang, som leder till slutsatsen att $f(x)$ aldrig kan bli större än det lokala maximivärdet 0,5 och att $f(x)$ aldrig kan bli mindre än det lokala minimivärdet $-0,5$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppgift nr 10 (3449)

Max 2/0

	Redovisad godtagbar metod	+1 g
	med korrekt svar $(-19 \pm 14\mathrm{i})$	+1 g

Uppgift nr 11 (3252)

Max 2/0

a)	Godtagbart svar, t.ex. $V = \int_0^4 \pi y^2 \,\mathrm{d}x$	+1 g
b)	Godtagbart svar (25 v.e.)	+1 g

Uppgift nr 12 (3091)

Max 3/0

	Redovisad korrekt bestämning av den allmänna lösningen, t.ex. $y = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$	+1 g
	med redovisad godtagbar bestämning av funktionen $\left(y = \mathrm{e}^{-4x} + 3\mathrm{e}^{2x}\right)$	+1-2 g

Uppgift nr 13 (1725)

Max 5/0

a)	Godtagbart svar ($\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN$)	+1 g
b)	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\frac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 4{,}5 \cdot 10^9}$	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning och godtagbart svar ($N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}54 \cdot 10^{-10}t}$)	+1 g
c)	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $0{,}146 \cdot N_0 = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}54 \cdot 10^{-10}t}$	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning och godtagbart svar (12 miljarder år)	+1 g

Uppgift nr 14 (3253)

Max 0/3

	Godtagbar ansats, t.ex. tecknar $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$	+1 vg
	med korrekt bestämning av radien	+1 vg
	med godtagbart svar (85 m²/s)	+1 vg

Uppgift nr 15 (2577)

Max 1/3

a) Redovisad godtagbar förklaring ("Mängden förorenat ämne ökar varje år med 100 kg minus tio procent av den aktuella mängden.") +1 g

b) Redovisad godtagbar bestämning av partikulärlösning, $y_p = 1000$ +1 vg

med i övrigt redovisad godtagbar lösning ($y(t) = 1000 - 500\mathrm{e}^{-0,1t}$) +1 vg

c) Godtagbar slutsats ("Massan stabiliserar sig kring 1000 kg") med motivering. +1 vg

Uppgift nr 16 (3450)

Max 1/1/¤

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. beräknar $1/z$ för något $z \in B$ eller skriver om uttrycket $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b}$ som $\dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$ +1 g

Redovisad lösning som gör troligt att $1/z$ ligger i F, t.ex. beräknar $1/z$ för flera $z \in B$ och formulerar hypotesen att $1/z \in F$ +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod, eleven för ett generellt resonemang, t ex genom att fastslå att $1/z$ ligger i fjärde kvadranten eftersom z ligger i första kvadranten.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra bevis, eleven visar med generella metoder att $1/z$ alltid ligger i F.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa är välstrukturerat och tydligt. Det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

Uppgift nr 17 (3451)

Max 3/3/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** ⟶	**Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven beräknar godtagbart volymen för en ring. **1-2 g**	Eleven visar säkerhet i beräkningarna, t.ex. genom att korrekt beräkna skillnaden mellan volymerna för minst två ringar *eller* påbörjar en generell undersökning, t.ex. genom att korrekt teckna ett generellt uttryck för volymen av en ring. *eller* genomför en generell undersökning som inte är helt korrekt. **2 g och 1 vg**	**2/1**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*	Eleven drar en slutsats om volymökningen baserat på ett specialfall (två beräknade volymer) *eller* en generell undersökning. **1 g**	Eleven drar en *godtagbar* slutsats om volymökningen baserat på flera specialfall (minst tre beräknade volymer) *eller* en generell undersökning. **1g och 1 vg**	**1/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**	**0/1**
Summa			**3/3**

MVG-kvaliteterna beskrivs i tabellen som följer.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod, eleven tecknar ett generellt uttryck för volymdifferensen: t.ex. $\pi\left(\frac{1}{3}+r+1\right)-\pi\left(\frac{1}{3}+r\right)$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	formulera någon korrekt slutsats, t.ex. ”Volymen ökar med $\pi\,\text{cm}^3$ för varje cm radien ökar”. Slutsatsen baseras på en generell metod.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.