Skolverket

Enheten för Pedagogiska Mätningar
Umeå universitet

PBMaE 02-05

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-15

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 15 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd".

Namn:______________________________

Skola:________________ Klass/program:____________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 1 (1661)
1/0

Skriv $3(4-3\text{i})+\text{i}(2+3\text{i})$ på formen $a+b\text{i}$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (2092)
2/0

Lös ekvationen $z^2-2z+5=0$

Uppgift nr 3 (1482)
1/0 , 2/0

Funktionen $y=C\text{e}^{\frac{-x}{2}}$ är lösning till $y'=ky$

a) Bestäm *k*. *Endast svar fordras*

b) Bestäm *C* så att en tangent till $y=C\text{e}^{\frac{-x}{2}}$ får riktningskoefficienten 5 i den punkt på kurvan där $x=0$

Uppgift nr 4 (1662)
1/0

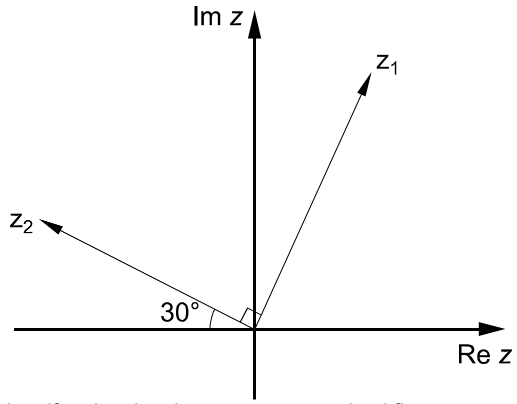
För vissa komplexa tal z $(z\neq 0)$ gäller att $\text{Re}\,z=4\cdot\text{Im}\,z$
Ge exempel på ett sådant tal. *Endast svar fordras*

Uppgift nr 5 (1483)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'+10y=20$ som uppfyller villkoret $y(0)=40$

Uppgift nr 6 (1477)
1/0 , 2/0 , 2/0

För de komplexa talen z_1 och z_2 som är markerade i figuren gäller att $|z_1| = 10$ och $\operatorname{Im} z_2 = 4$



Uppgiften kan inte lösas genom mätning i figuren.

a) Bestäm z_1 på polär form.

b) Bestäm z_2 på polär form.

c) Beräkna $\dfrac{z_1}{z_2}$ och svara på formen $a + b\mathrm{i}$

Uppgift nr 7 (2093)
0/2

Bestäm en homogen differentialekvation av andra ordningen vars allmänna lösning är $y = C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{-2x}$

Uppgift nr 8 (2094)
0/3

Om man vill beräkna längden L av en kurva $y = f(x)$ mellan två punkter vars x-koordinater är a och b kan man använda formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Beräkna längden av kurvan $y = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ i intervallet $1 \le x \le 4$

Uppgift nr 9 (968)
0/3

Ekvationen $z^4 - z^3 - z - 1 = 0$ har fyra rötter. En rot är $z_1 = \mathrm{i}$ och en annan rot är $z_2 = -\mathrm{i}$. Vilka är de övriga rötterna?

Uppgift nr 10 (1478)
2/0

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $3y'' + 6y' - 24y = 0$

Uppgift nr 11 (1356)
1/0 , 3/0

Agneta har förverkligat sin dröm och köpt en motorcykel. På hösten, när säsongen är slut, upptäcker hon att ett av däcken inte håller luften riktigt. Hon ställer in motorcykeln i ett garage för vinterförvaring och mäter lufttrycket till 2,9 bar. Fyra veckor senare har lufttrycket sjunkit till 2,7 bar.

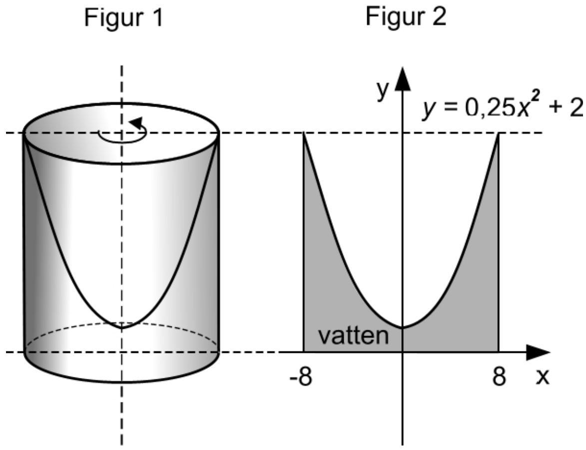
a) Antag att trycket i ett däck minskar med en hastighet som är proportionell mot trycket. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta.

Endast svar fordras

b) Vilket tryck kommer det att vara i däcket efter totalt 24 veckor i garaget enligt denna matematiska modell?

Uppgift nr 12 (1786)
0/3

En cylindrisk glasbehållare med inre diametern 16 cm är från början helt fylld med vatten. Behållaren roteras och så länge rotationshastigheten ökar rinner vatten över behållarens kant.
Vid en viss rotationshastighet står vattenytan i behållaren enligt figur 1. Sedd från sidan beskriver då vattenytan en parabel som ges av sambandet $y = 0{,}25x^2 + 2$ (Se figur 2)

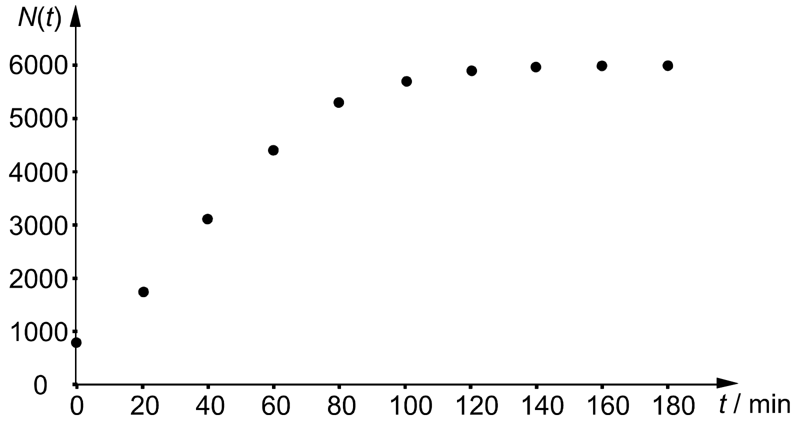


Hur mycket vatten har vid denna tidpunkt runnit ur behållaren?

Uppgift nr 13 (1853)
0/1 , 0/3

Vid en odling av bakterier fanns från början ca 800 bakterier på en agarplatta. Agarplattan innehåller näringslösning som bakterierna kan leva av. Antalet bakterier vid olika tidpunkter framgår av diagrammet nedan. På grund av olika faktorer kan inte bakterieantalet bli hur stort som helst på plattan. Sådana faktorer är t.ex. temperatur samt tillgång till näring och syre.


Bilden ovan visar en s.k. agarplatta med bakterier.



Bakterietillväxten kan beskrivas med differentialekvationen $\dfrac{dN}{dt} = k \cdot N(6000 - N)$ där N är antalet bakterier vid tidpunkten t minuter och $k = 8{,}08 \cdot 10^{-6}$

Denna differentialekvation har en lösning $N(t) = \dfrac{6000}{6{,}5\mathrm{e}^{-0{,}04848 \cdot t} + 1}$ som väl ansluter till mätvärdena i diagrammet ovan. Differentialekvationen och dess lösning utgör en matematisk modell till försöket.

a) Differentialekvationen betyder att bakterietillväxten är proportionell mot antalet bakterier N och mot uttrycket $(6000 - N)$
Hur ska uttrycket $(6000 - N)$ tolkas?

b) Vid vilken tidpunkt var tillväxthastigheten maximal enligt den matematiska modellen?

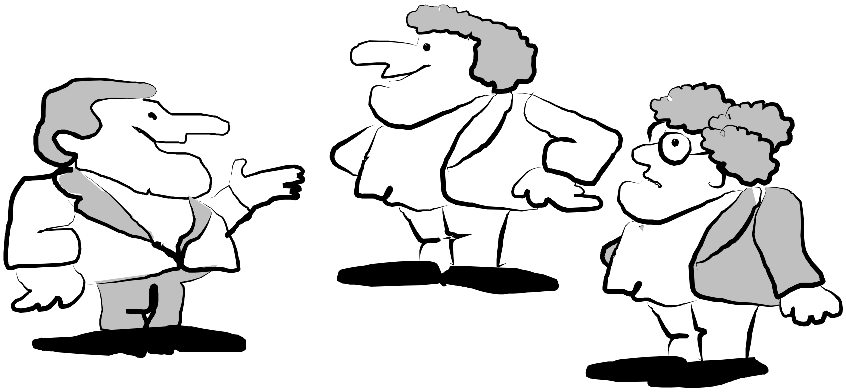
Uppgift nr 14 (1738)
0/3

För alla punkter på kurvan $y = f(x)$ gäller att tangenten i $(x, f(x))$ också går genom punkten $(x - 2,\ 0)$. Bestäm alla funktioner f som uppfyller detta.

Uppgift nr 15 (1943)
3/5

Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till

- hur du argumenterar för att Martins påstående är falskt och Viktors påstående är sant
- hur generellt du motiverar hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ska gälla
- hur väl du redovisar ditt arbete
- hur väl du använder matematiskt språk och uttryckssätt



- Martin påstår att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller för **alla** komplexa tal z_1 och z_2
  Ge argument varför det måste vara falskt.

- Viktor påstår att det finns minst **två** komplexa tal z_1 och z_2, båda skilda från noll, för vilka likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller.
  Ge argument varför det måste vara sant.

- Gustav inser dessutom att det går att finna **många** sådana par av komplexa tal z_1 och z_2. Undersök och beskriv hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ska gälla. Motivera dina slutsatser.

================================
Lösningar
================================
Uppgift nr 1 (1661)

$$3(4-3i)+i(2+3i)=12-9i+2i-3=9-7i$$

SVAR: $9-7i$

Uppgift nr 2 (2092)

$$z^2-2z+5=0$$
$$z_{1,2}=1\pm\sqrt{1^2-5}$$
$$z_{1,2}=1\pm 2i$$

SVAR: $z_{1,2}=1\pm 2i$

Uppgift nr 3 (1482)

a)

$$y=Ce^{\frac{-x}{2}}$$
$$y'=-\frac{1}{2}Ce^{\frac{-x}{2}}$$
$$y'=ky \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{1}{2}$$

SVAR: $k=-\frac{1}{2}$

b)

$$y=Ce^{\frac{-x}{2}}$$
$$y'(x)=-\frac{1}{2}Ce^{\frac{-x}{2}}$$
$$y'(0)=5 \;\Rightarrow\; 5=-\frac{1}{2}Ce^{\frac{-0}{2}}$$
$$C=-10$$

SVAR: $C=-10$

Uppgift nr 4 (1662)

$\operatorname{Re} z = 4 \cdot \operatorname{Im} z$
Antag $\operatorname{Im} z = 2$
Då blir $\operatorname{Re} z = 8$
och $z = 8 + 2\mathrm{i}$

SVAR: T.ex. $z = 8 + 2\mathrm{i}$

Uppgift nr 5 (1483)

$y' + 10y = 20 \qquad y(0) = 40$

$y_h = C \cdot \mathrm{e}^{-10x}$

$y_p = k$

$10k = 20 \quad k = 2$

$y = C \cdot \mathrm{e}^{-10x} + 2$

$40 = C + 2$

$C = 38$

SVAR: $y = 38 \cdot \mathrm{e}^{-10x} + 2$

Uppgift nr 6 (1477)

a)
$\arg(z_1) = 60^\circ$

$z_1 = 10(\cos 60^\circ + \mathrm{i} \sin 60^\circ)$

SVAR: $z_1 = 10(\cos 60^\circ + \mathrm{i} \sin 60^\circ)$

b)
$$|z_2| = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8$$

$z_2 = 8(\cos 150^\circ + \mathrm{i} \sin 150^\circ)$

SVAR: $z_2 = 8(\cos 150^\circ + \mathrm{i} \sin 150^\circ)$

c)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{8}(\cos(60^\circ - 150^\circ) + \mathrm{i} \sin(60^\circ - 150^\circ))$$

SVAR: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-5\mathrm{i}}{4}$

Uppgift nr 7 (2093)

Eftersom den allmänna lösningen är $y = C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{-2x}$ så måste lösningarna till den karaktäristiska ekvationen ha varit $r_1 = 2$ och $\mathrm{r}_2 = -2$. Den karaktäristiska ekvation som har dessa lösningar är $r^2 = 4$ vilken fås från differentialekvationen $y'' = 4y$.

SVAR: $y'' = 4y$

Uppgift nr 8 (2094)

$f(x) = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ ger att $f'(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\left(x - \frac{4}{9}\right)}\, dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}x}\, dx =$$

$$\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} = 8 - 1 = 7$$

SVAR: $L = 7$ l.e.

Uppgift nr 9 (968)

Eftersom två rötter är $z_1 = \mathrm{i}$ och $z_2 = -\mathrm{i}$ måste polynomet vara delbart med $(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = z^2 + 1$

Ekvationen kan efter t.ex. polynomdivision skrivas
$(z^2 + 1) \cdot (z^2 - z - 1) = 0$

$z^2 - z - 1 = 0$ har rötterna

$z_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ och $z_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

SVAR: $z_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ och $z_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Uppgift nr 10 (1478)

$$3y'' + 6y' - 24y = 0$$
$$r^2 + 2r - 8 = 0$$
$$r_1 = 2;\ r_2 = -4$$
$$y = Ce^{2x} + De^{-4x}$$

SVAR: $y = Ce^{2x} + De^{-4x}$

Uppgift nr 11 (1356)

a)
SVAR: $y' = -ky$

b)
$$y = Ce^{-kt}$$
$$2{,}7 = 2{,}9e^{-k\cdot 4}$$
$$k = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2{,}7}{2{,}9}\right)$$
$$y(24) = 2{,}9e^{-k\cdot 24} \approx 1{,}9$$

SVAR: Trycket är 1,9 bar.

Uppgift nr 12 (1786)

Integrationsgränser:
Undre gräns: 2
Övre gräns: $y = 0{,}25 \cdot 8^2 + 2 = 18$
$$y = 0{,}25x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = 4(y-2)$$

Volym vatten som runnit ur behållaren (cm^3):
$$4\pi\int_2^{18}(y-2)dy = 4\pi\left[\frac{y^2}{2} - 2y\right]_2^{18} = 512\pi \approx 1600$$

SVAR: 1,6 liter

Uppgift nr 13 (1853)

a)

SVAR: $(6000 - N)$ är det antal bakterier som vid en viss tidpunkt fortfarande kan tillkomma i odlingen, "det kvarvarande utrymmet".

b)

$$y = \frac{dN}{dt} = k \cdot N(6000 - N)$$

$$\frac{dy}{dN} = k \cdot (6000 - N) + kN \cdot (-1) = 6000k - 2kN = 0 \Rightarrow N = 3000$$

Detta motsvarar ett maximum eftersom $\frac{dN}{dt}$ har negativ koefficient i andragradstermen.

$N(t) = 3000$ ger tiden

$$\frac{6000}{6{,}5e^{-0{,}04848 \cdot t} + 1} = 3000$$

$$6{,}5e^{-0{,}04848 \cdot t} = 1$$

$$-0{,}04848 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{6{,}5}\right) \quad \text{vilket ger att} \quad t = \frac{\ln 6{,}5}{0{,}04848} \approx 39$$

SVAR: Tillväxthastigheten är maximal vid ca 39 minuter.

Uppgift nr 14 (1738)

Riktningskoefficienten för tangenten $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - 0}{x - (x - 2)} = 0{,}5f(x)$

Differentialekvationen blir $f'(x) = 0{,}5f(x)$ och dess allmänna lösning är $f(x) = Ce^{0{,}5x}$

SVAR: $f(x) = Ce^{0{,}5x}$

Uppgift nr 15 (1943)

Punkt 1:

Antag att $z_1 = 3+2\text{i}$ och $z_2 = 5-5\text{i}$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$\text{VL} = |z_1 + z_2| = |3+2\text{i}+5-5\text{i}| = |8-3\text{i}| = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \approx 8{,}54$

$\text{HL} = |z_1| + |z_2| = |3+2\text{i}| + |5-5\text{i}| = \sqrt{9+4} + \sqrt{25+25} = \sqrt{13} + \sqrt{50} \approx 10{,}7$

$\text{VL} \neq \text{HL}!$

Eftersom likheten inte gäller för dessa komplexa tal kan den inte gälla för alla komplexa tal.
(Även geometriska resonemang är tänkbara här)

Punkt 2:

Antag att $z_1 = 3+3\text{i}$ och $z_2 = 5+5\text{i}$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$\text{VL} = |z_1 + z_2| = |3+3\text{i}+5+5\text{i}| = |8+8\text{i}| = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\text{HL} = |z_1| + |z_2| = |3+3\text{i}| + |5+5\text{i}| = \sqrt{9+9} + \sqrt{25+25} = \sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$\text{VL} = \text{HL}!$

Eftersom likheten gäller för dessa två komplexa tal gäller den för minst två komplexa tal.
(Även geometriska resonemang är tänkbara här)

Punkt 3:

Låt $z_1 = A(\cos\alpha + \text{i}\sin\alpha)$ och $z_2 = B(\cos\beta + \text{i}\sin\beta)$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$|A(\cos\alpha + \text{i}\sin\alpha) + B(\cos\beta + \text{i}\sin\beta)| = A + B$

$\sqrt{(A\cos\alpha + B\cos\beta)^2 + (A\sin\alpha + B\sin\beta)^2} = A + B$

$\sqrt{A^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\cos\beta + B^2\cos^2\beta + A^2\sin^2\alpha + 2AB\sin\alpha\sin\beta + B^2\sin^2\beta} = A + B$

$\sqrt{A^2\cos^2\alpha + A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\beta + B^2\sin^2\beta + 2AB\cos\alpha\cos\beta + 2AB\sin\alpha\sin\beta} = A + B$

$\sqrt{A^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} + B^2\underbrace{(\cos^2\beta + \sin^2\beta)}_{1} + 2AB\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha-\beta)}} = A + B$

Enligt trigonometriska ettan är $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$
och enligt subtraktionsformeln för cosinus gäller att
$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$ och vi får efter kvadrering av VL och HL:

$A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta) = A^2 + 2AB + B^2$

För att likhet skall gälla måste $\cos(\alpha - \beta) = 1$. Detta är ett nödvändigt och tillräckligt villkor.

$$\cos(\alpha - \beta) = 1$$
$$\alpha - \beta = \pm 0^\circ + n \cdot 360^\circ$$
$$\alpha = \beta + n \cdot 360^\circ, \text{där } n \text{ är ett heltal}$$

Eftersom α och β är argument för de två komplexa talen och dessa är lika eller skiljer sig på ett helt antal varv så måste de två talen ligga på samma stråle, som utgår från origo, när de representeras av visare/punkter i det komplexa talplanet.

(Man kan även ansätta rektangulära koordinater eller komma fram till rätt slutsats genom att utföra geometriska resonemang)

==

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

Betygsgräns G: 12
Betygsgräns VG: 26 varav 6 vg poäng
Betygsgräns MVG: Fanns ej eftersom provet gjordes enligt kursplan 94.

==

Uppgift nr 1 (1661)

Max 1/0

	Korrekt svar ($9-7\mathrm{i}$)	+1 g

Uppgift nr 2 (2092)

Max 2/0

	Redovisad godtagbar metod	+1 g
	med korrekt svar $(z=1\pm 2\mathrm{i})$	+1 g

Uppgift nr 3 (1482)

Max 3/0

a)	Korrekt svar $\left(k=-\dfrac{1}{2}\right)$	+1 g
b)	Godtagbar ansats för bestämning av C (inser att $y'(0)=5$)	+1 g
	med korrekt svar ($C=-10$)	+1 g

Uppgift nr 4 (1662)

Max 1/0

	Godtagbart svar (t.ex. $z=8+2\mathrm{i}$)	+1 g

Uppgift nr 5 (1483)

Max 3/0

	Korrekt lösning till den homogena ekvationen ($y_h=C\mathrm{e}^{-10x}$)	+1 g
	Korrekt partikulärlösning ($y_p=2$)	+1 g
	med korrekt svar ($y=38\mathrm{e}^{-10x}+2$)	+1 g

Uppgift nr 6 (1477)

Max 5/0

a)	Korrekt svar $\left(z_1 = 10(\cos 60^\circ + \mathrm{i}\sin 60^\circ)\right)$	+1 g
b)	Godtagbar metod	+1 g
	med korrekt svar $\left(z_2 = 8(\cos 150^\circ + \mathrm{i}\sin 150^\circ)\right)$	+1 g
c)	Godtagbar metod (t.ex. bestämt kvotens argument och belopp)	+1 g
	med korrekt svar $\left(-\dfrac{5\mathrm{i}}{4}\right)$	+1 g

Uppgift nr 7 (2093)

Max 0/2

Redovisad godtagbar ansats (t.ex. identifierat den karaktäristiska ekvationens rötter och funnit att den karaktäristiska ekvationen är $r^2 = 4$)	+1 vg
med korrekt svar $\left(y'' = 4y\right)$	+1 vg

Uppgift nr 8 (2094)

Max 0/3

Korrekt derivering $\left(f'(x) = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$	+1 vg
Godtagbar beräkning av kurvans längd $(L = 7 \text{ l.e.})$	+1-2 vg

Uppgift nr 9 (968)

Max 0/3

Godtagbar ansats (t.ex. korrekt tecknad polynomdivision)	+1 vg
Funnit faktorn $z^2 - z - 1$	+1 vg
med korrekt bestämning av övriga rötter $\left(z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$	+1 vg

Uppgift nr 10 (1478)

Max 2/0

Korrekt löst karakteristisk ekvation $(r_1 = 2;\ r_2 = -4)$	+1 g
med godtagbart svar ($y = C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{-4x}$)	+1 g

Uppgift nr 11 (1356)

Max 4/0

a)	Godtagbart tecknad differentialekvation ($y' = -ky$)	+1 g
b)	Korrekt allmän lösning	+1 g
	med godtagbar beräkning av trycket (1,9 bar)	+1-2 g

Uppgift nr 12 (1786)

Max 0/3

Godtagbart uppställd integral $\left(\pi \int_{2}^{18} 4(y-2)dy \right)$	+1-2 vg
med godtagbar beräkning av vattenmängd som runnit ut (1,6 liter)	+1 vg

Uppgift nr 13 (1853)

Max 0/4

a)	Godtagbar förklaring (($6000 - N$) är det antal bakterier som vid en viss tidpunkt fortfarande kan tillkomma i odlingen, "det kvarvarande utrymmet")	+1 vg
b)	Godtagbar metod för bestämning av tidpunkten	+1 vg
	Godtagbar bestämning av sökt tidpunkt (39 minuter)	+1 vg
	med godtagbart verifierande av maximum	+1 vg

Uppgift nr 14 (1738)

Max 0/3

Godtagbar ansats (t.ex. godtagbar tolkning av texten redovisad med hjälp av en figur)	+1 vg
Korrekt tecknad differentialekvation	+1 vg
med korrekt svar ($y = Ce^{0,5x}$)	+1 vg

Uppgift nr 15 (1943)

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning finns som dokument i pdf-format att skriva ut.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →		**Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.	Eleven utför väsentligen korrekta beräkningar med egna värden på z_1 och z_2 eller använder godtagbara vektorexempel rörande Martins och Viktors påståenden. (1/0)	Eleven påbörjar en generell algebraisk eller geometrisk metod (vektorräkning) (1/1)	Eleven fullföljer en generell algebraisk metod och når sambandet $z_1 = k \cdot z_2$ eller andra ekvivalenta uttryck eller fullföljer en geometrisk metod (vektorräkning) (1/2)	(1/2)
Matematiska resonemang Förekomst och kvalitet hos värdering analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.	Eleven vederlägger Martins påstående med ett motexempel. Eleven stödjer Viktors påstående med ett exempel. (2/0)	Eleven beskriver godtagbart de komplexa talens läge ("De ligger på en linje som <u>startar</u> i origo") och slutsatsen baseras t.ex. på en diskussion kring väl valda specialfall. (2/1)	Eleven beskriver godtagbart de komplexa talens läge ("De ligger på en linje som <u>startar</u> i origo") och slutsatsen baseras på en generell diskussion kring sambandet $z_1 = k \cdot z_2, k > 0$ eller andra motsvarande formuleringar eller slutsatsen baseras på en heltäckande diskussion kring vektoraddition (2/2)	(2/2)
Redovisning och matematiskt språk Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner			Redovisningen är välstrukturerad, fullständig och tydlig. Det matematiska språket är i huvudsak korrekt och lämpligt. (0/1)	(0/1)
Summa				(3/5)